移動境界を伴う圧縮性流体の数値解析

中島 啓之 (16416572)　　指導教員　森西 洋平　助教授

1　はじめに

近年，計算機の発達とともに工業機器の流体解析に数値流体力学が用いられるようになってきた．数値流体力学は実験と比較して迅速性，安全性，コストの点で有利な場合が多いことから，工業機器の開発設計，性能評価およびその改善等に取り入れられている．一般に工業機器内の流れは複雑な場合が多く，現象を簡単化し近似的に表現する仮定 (計算モデル) が導入され数値計算が行われる．高効率で安全な設計には実現象を正確に再現する必要があり，的確な計算モデルの選択が重要な問題となる．

Newton 応力の構成方程式には，粘性係数 μ と体積粘性係数 $\mu_b = \mu_s + \frac{2}{3}\mu$ を与える必要がある．ここで μ_s は第 2 粘性係数である．従来は Stokes の仮説 $(\mu_b = 0)$ から $\mu_s = -\frac{2}{3}\mu$ が使用されている．しかし，機械工学の応用問題に対してその妥当性は明確でない．そこで本研究ではまず，工学的に重要である境界層および衝撃波について Stokes の仮説の妥当性を示す．次に工業的応用問題としてピストン式コンプレッサ内の圧縮性非定常流れの数値解析を行う．本研究では特に効率に大きな影響を及ぼす圧縮，吐出行程に着目し，数値解析により現象を再現することを試みるとする．そのために，弁周辺で起きている現象の再現を行う．従来の弁運動は，弁を片持ち薄板ばねと見なし運動方程式を解くことで評価した．本研究ではより実機に近い弁モデルとして，弁を実機の弁と同形状の片持ち梁とみなし運動方程式を解くことで弁運動を評価する．

2　数値計算手法

本研究では基礎方程式として 3 次元 Navier-Stokes 方程式を用い，空間離散化には移動格子によるセル中心有限体積法 [1] を使用し幾何学的な保存則を満足させている．数値流束の評価には MUSCL 法により高次精度化された SHUS（Simple High-resolution Upwind Scheme）[2] を用い，MUSCL 法に Van Albada の流速制限関数を導入し TVD 条件を満足させている．時間進行法にはオイラー陽解法を用いている．

3　Stokes の仮説の妥当性

Newton 応力の構成方程式は次式となる．

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \mu_b \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{3.1}$$

ただし，μ は粘性係数，μ_b は体積粘性係数である．Stokes の仮説 $(\mu_b = 0)$ が成立するとき式 (3.1) 第 3 項は零となる．単原子分子の場合は厳密に $\mu_b = 0$ となり，Stokes の仮説が成立する．一方，多原子分子では $\mu_b > 0$ となる．非圧縮性流体の場合，連続の式から体積粘性係数 μ_b は構成方程式中に現れない．そこで本研究では，工学上重要となる壁付近の流れおよび物理量が不連続となる衝撃波における Stokes の仮説の妥当性を検討する．以下では境界層流れと衝撃波管内流れに対して検討を行う．

3.1　境界層における体積粘性係数の影響

平板上に生じる圧縮性流体の境界層について考える．2 次元で定常の圧縮性流体の連続の式および Navier-Stokes 方程式を無次元化し，Navier-Stokes 方程式の各項に対しオーダー評価を行う．これより体積粘性係数が含まれる項は無視できるため，境界層流れに対して Stokes の仮説を用いても計算結果に問題は生じない．

3.2　衝撃波における体積粘性係数の影響

体積粘性係数を $\mu_b = 0$，$\mu_b = 0.73\mu$ および $\mu_b = 2000$ と変化させた数値計算を通して衝撃波における Stokes の仮説の妥当性を検討する．解析対象は Fig.1 に示すような 1 次元静止衝撃波であり，格子は衝撃波が存在する管中央部分で格子解像度が高くなるように配置されている．流れ方向 z の格子数は 1000 である．管左側には Table1 の低圧側の物理量を一様に与え，管右側には表の高圧側の物理量を与えた．管左端には表の低圧側の物理量を用いて流入境界条件を課した．管右端には表の高圧側の物理量を用いて流出境界条件を課し，表に記載されていない物理量に関してはノイマン型境界条件を課した．

まず，体積粘性係数の変化による衝撃波ごく近傍の密度分布の違いについて調べる．$\mu_b = 0$ のときの密度の計算結果を ρ_0 とし，衝撃波近傍での密度差 $|\rho_{0.73\mu} - \rho_0|$ を Fig.2 に示す．Fig.2 より，衝撃波ごく近傍で密度差が最大となるが，その最大値は 10^{-10} 程度であり無視できる．密度差 $|\rho_{2000\mu} - \rho_0|$ の場合も同様であった．これより体積粘性係数が $0 \sim 2000\mu$ で変化させても，衝撃波ごく近傍で物理量分布に違いは生じない．次に体積粘性係数と衝撃波厚さの関係について調べる．ここで衝撃波厚さは次式から決定する．

$$\delta = \left|(\rho_f - \rho_b)/\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{\max}\right| \tag{3.2}$$

ここで ρ_f および ρ_b はそれぞれ衝撃波上流の密度および下流の密度であり，$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{\max}$ は衝撃波内部の傾きの最大値である．式 (3.2) から算出した衝撃波厚さを Table2 に示す．Table2 より，$\mu_b \sim \mu$ のとき δ は 10 桁以内で変化は見られない．$\mu_b = 2000\mu$ のときにも $\mu_b = 0$，$\mu_b = 0.73\mu$ と比較して 0.0001 %程度しか変化していない．これらの結果より体積粘性係数を $0 \sim 2000\mu$ で変化させても衝撃波厚さに大きな変化は生じない．以上より，工学的応用で重要である衝撃波による物理量の不連続および境界層流れに Stokes の仮説を用いても計算結果に問題は生じない．

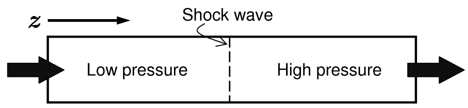

Fig. 1 Shock tube

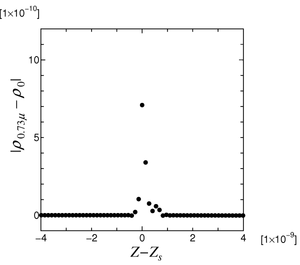

Fig. 2 Density difference

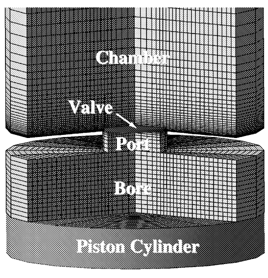

Fig. 3 Numerical grid

Table 1: Initial condition

	Low pressure side	High pressure side
Pressure	0.648	0.725
Density	1.0	1.084
Velocity	$w = 1.0$	$w = 0.923$
Total energy	2.12	

Table 2: Shock wave thickness

μ_b	δ[m]
0	$1.654582522 \times 10^{-10}$
0.73μ	$1.654582522 \times 10^{-10}$
2000μ	$1.654583752 \times 10^{-10}$

4　コンプレッサ内流れの数値解析

Fig.3 は本研究で対象とするコンプレッサの計算格子であり，コンプレッサはピストンにより流体が圧縮されるボア室，流体が吐出されるチャンバー室，ボア室とチャンバー室をつなぐポート，および弁から構成されている．本研究の数値解析において流れ場は前述した数値計算手法によって計算され，弁運動は後述する運動方程式を解くことで決定する．このため，流れ場は構造との連成問題となる．

4.1　弁運動のモデル化

4.1.1　Spring model

解析対象は Fig.4 に示すような流体との相互作用により開閉する弁を有している．この弁運動を Fig.5 に示すようなばねを用いたモデルで評価する．この場合，弁変位は弁上のどの点においても等しい 1 次元問題として扱う．弁の運動方程式は次式となる．

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\lambda\omega\frac{dz}{dt} + \omega^2 z = F_p + F_g \tag{4.1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \lambda = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{mk}},\ F_p = S_v\left(P_l - P_u\right)$$

k : ばね係数，　c : 減衰係数，　S_v : 弁の面積

P_l : 弁下面に作用する圧力の平均値，　m : 弁の質量

P_u : 弁上面に作用する圧力の平均値，　z : 弁変位

ここで，F_g は潤滑油の粘性による力 (凝着力) であり詳細は 4.1.3 節で示す．

4.1.2　Beam model

本研究では式 (4.1) の Spring model よりさらに実機に近い Beam model を考える．弁形状を Fig.4 に示すような片持ち梁と見なし，運動方程式を導出する．梁の微小要素に作用する力の釣り合いを解くことによって次式を得る．

$$m(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = F_p + F_g \tag{4.2}$$

$m(x)$: x 方向単位長さあたりの質量，　z : 弁変位

E : ヤング率，　$I(x)$: 断面 2 次モーメント

ある位置 x での弁の幅の変化は断面 2 次モーメントの変化として示し，弁運動は $x - z$ の 2 次元問題として扱う．

4.1.3　凝着力

コンプレッサ内に封入されている潤滑油が弁に付着することで，潤滑油の粘性による力 (凝着力) が弁運動に影響を及ぼしていると考えられる[3]．そこで以下に弁に作用する凝着力の評価方法を示す．半径 R の弁 (円板) が，それに平行に置かれた壁面から引き離される場合を考える．壁面は潤滑油で覆われ，その粘度を μ_o とする．弁が高さ h_1 から h_2 まで移動するとき弁に作用する凝着力 F_g は次式で評価される．

$$F_g = \frac{3\pi\mu_o R^4}{4t_g}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) \tag{4.3}$$

ただし，t_g は弁が高さ h_1 から h_2 まで移動するのに要した時間である．

4.2　計算条件および計算結果

数値計算を行う上での初期条件はチャンバー室圧力とボア室圧力が等しくなる時刻 t_0 の圧力 P_0，温度 T_0 を実験結果から与える．密度 ρ_0 は理想気体の状態方程式から算出する．速度の初期値は $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ とする．作動気体として代替フロンを用い，これをモデル化した代替フロンモデル（$\gamma = 1.1$）を採用する．総格子点数は約 3 万点であり，計算は Table3 に示す 3 ケースについて実行する．

Fig.6 にポート側壁部の圧力の時間変化を示す．Case1 は実験値のような圧力のポークを再現できていない．一方，Case2 は圧力のピークを精度よく再現できている．また Case1 および Case2 は開弁後の圧力の時間的振動をよく再現できている．これより，凝着力を弁運動に考慮することによって吐出圧力損失を再現可能となることがわかる．次に弁モデルの比較を行う．Case2，Case3 はともに吐出圧力損失のピークを精度よく再現できている．開弁後の圧力の時間的振動は，Case2 では実験値と同程度の振動振幅が再現されているのに対し，Case3 では振動振幅が小さく評価されている．

Fig.7 にポート中央部弁変位の時間変化を示す．Case1 では計算開始直後に開弁していることがわかる．一方，凝着力を考慮した Case2 は計算開始からしばらく弁は開かない．これより弁運動に凝着力を考慮することによって開弁時刻が遅れ，その結果ボア内圧力が上昇し，吐出圧力損失が生じる原因となることがわかる．Case2，Case3 を比較すると，開弁後 Case3 の方が弁変位の減衰量が少ないことがわかる．Fig.6 で Case3 の圧力振動の振幅が小さいのは，弁変位の減衰が弱く，弁が最初開いたときに冷媒が一気に吐出してしまうためと考えられる．また開弁後 Case3 の弁変位は右下がりに振動しており，実験結果と定性的に一致しているといえる．これより Beam model は Spring model より弁変位を正確に再現できるといえる．

5　おわりに

本研究では Stokes の仮説の妥当性を境界層流れに対してはオーダー評価，衝撃波管内流れに対しては数値解析により検討した．またコンプレッサ内流れの数値解析を新たな弁モデルを用いて実行した．まず，Stokes の仮説を用いても境界層流れおよび物理量が不連続となる衝撃波の計算結果には実用上の問題はないことが確認された．凝着力を考慮した弁モデルは吐出圧力損失を精度よく再現できる．また吐出圧力損失の主要因は凝着力により開弁時刻が遅れるためである．さらに開弁後の弁挙動は Spring model より Beam model の方が実験結果を定性的に再現できる．

参考文献

[1] 三原，松野，里深，機論 (B)65-637，B(1999)，pp. 2945-2953.

[2] 嶋，城之内，航空宇宙技術研究所特別資料，27(1994)，pp. 255-260.

[3] 曽田範宗訳，固体の摩擦と潤滑，(1961)，pp. 259-261,288-289，丸善.

Table 3 Numerical condition

Case	Valve motion	F_g
Case1	Eq.(4.1)	0
Case2	Eq.(4.1)	Eq.(4.3)
Case3	Eq.(4.2)	Eq.(4.3)

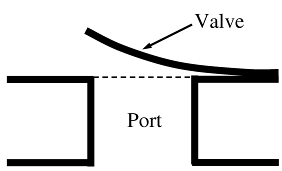

Fig. 4 Practical valve

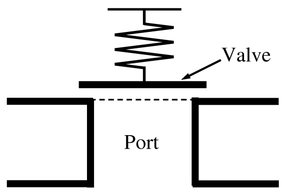

Fig. 5 Spring model

非公開画像

Fig. 6 Pressure profile

非公開画像

Fig. 7 Displacement of valve