壁乱流における1方程式型SGSモデルの評価

嶽村彰俊 (15416569)　指導教員　森西洋平 助教授

1　はじめに

非定常乱流の CFD 手法である Large Eddy Simulation(LES) は，空間的フィルター化操作を施すことにより粗視化された乱流場の大スケール成分 (Grid Scale,GS) 成分を直接数値計算し，Subgrid Scale(SGS) 成分に対してはモデル化を導入する流体数値解析法である．スケールの分離を行うことにより DNS と比べて，計算負荷や容量の点で有利であり，複雑な形状の流れ場および複雑な流体の乱流の数値シミュレーションとして大きな期待が持たれている．

LES を用いたモデル化手法に関しては，SGS 応力をモデル化し，フィルター化 NS 式を解析する 0 方程式型 SGS モデルが検証されているが，外力の表現等の限界も指摘される．そこで，本研究では SGS エネルギー輸送における生産，散逸および拡散，の効果，また，外力の効果等を SGS モデルに取り入れることが可能な 1 方程式型 SGS モデルに着目する．既存の 1 方程式型 SGS モデルは乱流統計理論である TSDIA や直感的考察 (勾配拡散型近似等) に基づく SGS モデルが主流である．しかしこれらの 1 方程式型 SGS モデルは，壁面を考慮したモデル補正や適用する流れ場の条件・形状によりモデル定数の最適化が必要といった制約も多い．一方，スケール相似則に基づく 1 方程式型 SGS モデルの研究はこれまで行なわれていない．そこで本修士論文では，a priori test から，既存の 1 方程式型 SGS モデルおよび DNS データとの比較を通して，スケール相似則に基づく 1 方程式型 SGS モデルの検討を行なう．

2　LES における基礎的事項

2.1　フィルター化と LES 基礎方程式

乱流場の粗視化手法として次式で定義されるフィルター化操作を行なう．

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{2.1}$$

$$\overline{\phi}(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x}',t)d\mathbf{x}' = G*\phi \tag{2.2}$$

ここで,「$\overline{}$」は GS 諸量,「 $'$」は SGS 諸量であり，G はフィルター関数,「 $*$ 」はたたみこみ積分を表す．

NS 式にフィルター化を施すと次式のフィルター化基礎方程式が得られる．

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_j\overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

ここで SGS 応力 τ_{ij} は次式で定義される．

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i\overline{u}_j \tag{2.5}$$

2.2　SGS エネルギー輸送方程式

フィルター化 NS 方程式 (2.4) を変形すると，一般化中心モーメントで表された次式の SGS エネルギー $k_{sgs} = \frac{1}{2}(\overline{u_i u_i} - \overline{u}_i\overline{u}_i)$ の輸送方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_j k_{sgs}}{\partial x_j} &= \underbrace{-\mathcal{T}(u_i,u_j)\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}}_{SGS\ 生産項} \\ &+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\underbrace{\nu\frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j}}_{SGS\ 粘性拡散項} \underbrace{-\mathcal{T}(u_j,p)}_{SGS\ 圧力拡散項} \underbrace{-\frac{1}{2}\mathcal{T}(u_i,u_i,u_j)}_{SGS\ 乱流拡散項}\Big] \\ &\underbrace{-\mathcal{T}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial u_i}{\partial x_j})}_{SGS\ 散逸項}\end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，上式中の一般化中心モーメント $\mathcal{T}$ は次式のように定義される．

$$\mathcal{T}(\phi,\psi) = \overline{\phi\psi} - \overline{\phi}\,\overline{\psi} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\phi,\psi,\xi) &= \overline{\phi}\mathcal{T}(\psi,\xi) - \overline{\psi}\mathcal{T}(\xi,\phi) \\ &\quad -\overline{\xi}\mathcal{T}(\phi,\psi) - \overline{\phi}\,\overline{\psi}\,\overline{\xi}\end{aligned} \tag{2.8}$$

3　1 方程式型 SGS モデルの評価

3.1　SGS 応力のモデル化

乱流統計理論により導かれる SGS 応力 τ_{ij} のモデルを示す．

$$\mathcal{T}(u_i,u_j) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k_{sgs} = -2\nu_T\overline{S}_{ij} \tag{3.1}$$

$$\nu_T = C_\nu^T\overline{\Delta}k_{sgs}^{1/2} \tag{3.2}$$

ここで，ν_T は渦粘性係数，$\overline{S}_{ij}$ は GS 速度ひずみテンソルを表す．さらに高次の理論解析により，渦粘性を抑制するために補正を施した渦粘性係数 ν_{TO} が提案されている[1]．

$$\nu_{TO} = \frac{C_\nu^{TO}\overline{\Delta}k_{sgs}^{1/2}}{1 + C_k^{TO}\overline{\Delta}^2|\overline{S}|^2/k_{sgs}} \tag{3.3}$$

3.2　乱流統計理論により導かれる 1 方程式型 SGS モデル (T-model,TO-model)

- SGS 拡散項のモデル
  SGS 乱流拡散項と SGS 圧力拡散項を合わせて考慮した SGS 拡散のモデルは，次式の勾配拡散型近似で表される [2]．

$$\mathcal{D}_T = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[C_D^T\overline{\Delta}k_{sgs}^{1/2}\frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j}\Big] \tag{3.4}$$

- SGS 散逸項のモデル
  次元解析により次式のようにモデル化される [2]．

$$\mathcal{E}_T = -C_\mathcal{E}^T\frac{{k_{sgs}}^{3/2}}{\overline{\Delta}} \tag{3.5}$$

さらに，次式に壁面漸近挙動を考慮した Jones-Launder 型の補正項 $\mathcal{E}_w$ を付加する[1]．

$$\mathcal{E}_{TO} = \mathcal{E}_T - 2\nu\frac{k_{sgs}^{1/2}}{\partial x_j}\frac{\partial k_{sgs}^{1/2}}{\partial x_j} \tag{3.6}$$

また，各項のモデル定数には Okamoto and Shima[1] により最適化された定数を用いた．

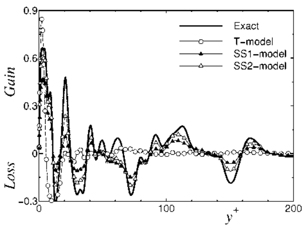

Fig. 3.1 SGS diffusion term

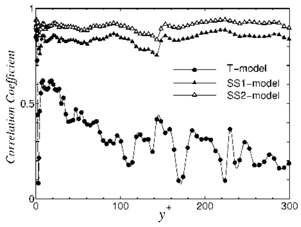

Fig. 3.2 Correlation Coefficient(SGS diffusion term)

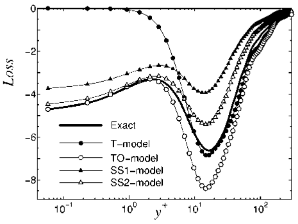

Fig. 3.3 SGS dissipation term

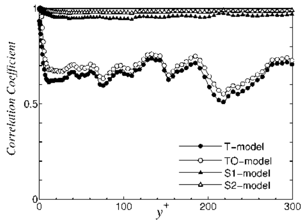

Fig. 3.4 Correlation Coefficien(SGS dissipation term)

3.3 スケール相似則による 1 方程式型 SGS モデル (SS1,SS2-model)

物理量 ϕ の近似 $\tilde{\phi}$ に対して近接するスケール間における相似則により次式のようなモデル化を行なう．

$$*1\text{ 次近似}\qquad \tilde{\phi} = \overline{\phi}$$

$$*2\text{ 次近似}\qquad \tilde{\phi} = \overline{\phi} + \overline{\phi'}$$
$$\sim \overline{\phi} + (\overline{\phi} - \overline{\overline{\phi}})$$

さらに同様にして，より高次の近似の拡張が可能である．式 (2.6) 中の一般化中心モーメント $\mathcal{T}$ で表された各項に対して，上式で表されるスケール相似則の 1 次近似および 2 次近似でモデル化された 1 方程式型 SGS モデルをそれぞれ SS1-model および SS2-model とする．また，ここで用いられる各項のモデル定数は全て 1 とした．

3.4 モデルの評価方法

モデルの評価には，a priori test を用いる．a priori test は DNS により計算された流れ場をフィルター化することで抽出された GS 成分をモデルに代入し，厳密な SGS 諸量と比較することによってそのモデルの性能を直接評価する．また，容易に得られた結果からモデルの再構築を模索する手段として有効な手法となり得る．

3.5 計算結果

本研究で検討を行なった流れ場形状は平板チャネル乱流である．用いた DNS データ [3] の計算条件を Table.3.1 に示す．フィルター関数にはガウシアン関数，フィルター幅には流れ方向およびスパン方向にフィルター操作を施した面フィルターが使用されている．本論文中では 3 種類の異なるフィルター幅を用いたモデルの検討を行う．

Fig.3.1〜Fig.3.4 に SGS 拡散項および SGS 散逸項の SGS モデルと，各項の SGS モデルの Exact 値との相関係数を示す．ここではフィルター幅を格子幅の 2 倍とした結果を示している．

SGS 拡散項に関して，スケール相似則モデルにより導かれる SGS 拡散項モデル (SS1，SS2-model) は勾配拡散型近似を用いた SGS 拡散項モデル (TO-model) と比較して，Exact 値に対してより近似度の高い値を示している．さらに高次のスケール相似則モデルを用いれば，より信頼性の高いモデルが構築できる．SGS 散逸項に関して，TO-model は壁面漸近挙動を考慮した補正項の効果により，壁近傍で Exact 値にほぼ一致することが確認される．しかし、負のピーク値の存在する $y^+ = 15$ 付近において TO-model は Exact 値を過大評価し，一方で SS1，SS2-model は過小評価しており，いずれのモデルも Exact 値に対するモデル近似度の低さが確認される．

Table. 3.1 Computation Parameter

計算手法	スペクトル法
レイノルズ数 $Re_\tau(=\frac{u_\tau h}{\nu})$	300
計算領域 $(L_1 \times L_2 \times L_3)$	$2\pi h \times 2h \times 2\pi h/3$
格子数 $(N_1 \times N_2 \times N_3)$	$128 \times 161 \times 128$
格子解像度	$15 \times (0.058 \sim 5.9) \times 4.9$

3.6 SGS 散逸項モデルに対する混合モデルの検討

SS1，SS2-model は TO-model に比べて，局所の SGS 散逸に対しての相関は高いことが知られてる．このことと散逸構造が小スケールに依存することを考慮すると，SGS 散逸項に対しての混合モデルの有効性が期待される．そこで，混合モデル $\mathcal{E}_{mix}$ を混合パラメータ C_{max} を用いて以下のように表す．

$$\mathcal{E}_{mix} = \{C_{mix}\mathcal{E}^H_{SS1} + (1 - C_{mix})\mathcal{E}_T\} + \mathcal{E}_w \qquad (3.7)$$

ここで，$\mathcal{E}^H_{SS1}$ は SS1-model から壁面効果を除去したモデルであり，次式で表される．

$$\mathcal{E}^H_{SS1} = \mathcal{E}_{SS1} - \mathcal{E}^W_{SS1} \qquad (3.8)$$

$$\mathcal{E}^W_{SS1} = -2\nu \frac{k^{1/2}_{SS1}}{\partial x_j}\frac{\partial k^{1/2}_{SS1}}{\partial x_j} \qquad (3.9)$$

$$k_{SS1} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{u}_i\,\overline{u}_i} - \overline{\overline{u}}_i\,\overline{\overline{u}}_i) \qquad (3.10)$$

混合パラメータ C_{mix} は k_{SS1} と k_{sgs} の比 k_{SS1}/k_{sgs} を用いて次式のように設定した．

$$C_{mix} = \frac{1 - e^{-\frac{k_{SS1}}{k_{sgs}}}}{1 - e^{-1}} \qquad (3.11)$$

C_{mix} は $0 < C_{mix} < 1$ であり，フィルター幅が小さいほど 1 に漸近する値である．つまり，LES における格子解像度が高いほど局所の散逸に対しての相関が高いスケール相似則によるモデル $\mathcal{E}^H_{SS1}$ の寄与が大きくなる性質を反映している．逆に，格子解像度が低いほど，乱流統計理論によるモデルの寄与が卓越するようになっている．また，スケール相似則によるモデルはフィルター幅が小さい場合，信頼性が著しく低下するということが確認されており，このことを考慮しても効果的なパラメータであると考えられる．

本論文中で，式 (3.7) で表される散逸項の混合モデル $\mathcal{E}_{mix}$ の検討を行い，低解像度な LES の場合に対してこの混合モデルの有効性が確認された．

4 結言

- a priori test により 1 方程式型 SGS モデルの評価を行なった．
- 勾配拡散型近似による SGS 拡散項モデルは近似度が低いことが確認された．
- スケール相似則による SGS 散逸項モデルに対して，混合モデルの検討を行なった．

参考文献

[1] Okamoto,M. and Shima,N.,JSME Int.J.,42-2,B(1999)

[2] Yoshizawa,A. and Horiuti,K.,J.Phys.Soc.Jpn.,54(1985)

[3] 森西, 玉野, 仲村, 機論 (B 編),69-682 (2003).