

# 回転平板チャネル乱流の数値解析

前田 康幸

2004年2月18日

## 1 緒言

回転平板チャネル乱流は、ターボ機械や回転機械の冷却経路などに見られるコリオリ力が作用する流れの基礎として、これまでも実験的には Johnston et al.(1972)、また数値計算上では Kristoffersen & Andersson(1993) など、多くの研究がなされている。

しかし、コア領域に現れる絶対渦度がゼロとなる領域の存在など、実験的あるいは計算上で確認されている<sup>[1][2]</sup>にも関わらず理論的な証明がなされていない問題も多く残されている。そこで本研究ではこの流れ場について数値計算および理論解析を用いて解析を行う。まず回転系における各統計平均量の輸送方程式を導出し、それをもとに解析を行う。また回転平板チャネル乱流では計算例の少ない乱流エネルギー散逸率についても直接数値計算を行い、回転が与える影響について考察する。

## 2 計算結果および考察

### 2.1 計算条件

今回はスペクトル法による直接数値計算を行う。流れ場の形状を Fig. 1 に、計算条件を Table 1 に示す。Case 1 は静止系、Case 2 は  $x_3$  軸周りにローテーション数  $Ro_\tau = 5.0$  で回転する回転系である。また本研究および比較を行った従来の直接数値計算<sup>[2][3]</sup>における解像度を Table 2 に示す。表より今回行った計算は従来の研究に比べて十分な格子解像度を持っていることがわかる。

### 2.2 平均速度分布

Fig. 2 に、平均速度分布を従来の研究<sup>[4][5]</sup>と比較したものを示す。図を見ると、本研究における平均速度分布は従来の研究の  $Ro_\tau$  が 2.5 のものと 7.5 のものの中に入っており、本研究のデータは信頼性があるといえる。また分布の直線部分の傾きが  $2\Omega_F$  となることが知られているが本研究では  $1.98\Omega_F$  とほぼその値と一致しており、このことから本研究の結果の信頼性の高さがいえる。また、平均速度を壁座標で整理した図を Fig. 3 に示す。 $y^+ < 5$  の壁近くにおいてはローテーション数によらず  $U^+ = y^+$  の壁法則に従っていることがわかる。またそれよりも流路中央に近い部分においては圧力側で静止系の下側、負圧側で静止系の上側に分布し、ローテーション数が増加するほど静止系との差が大きくなる。

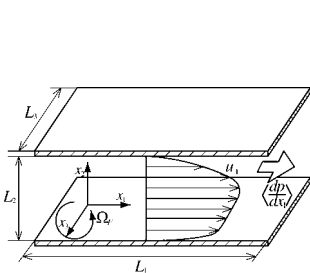


Fig. 1: Computational domain

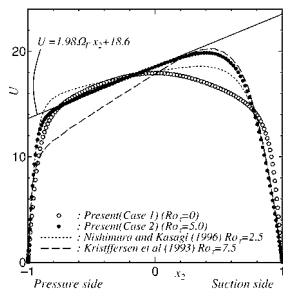


Fig. 2: Mean velocity profile

### 2.3 流れの可視化

回転系の流れ場における速度勾配テンソル  $\partial u_i / \partial x_j$  の第二不変量  $Q$  の等値面を Fig. 5 に示す。次式で表される  $Q$  の等値面は渦構造の存在を表す。

$$Q = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle \quad (1)$$

Table 1: Computational parameters

	Case 1	Case 2
Domain $L_1 \times L_2 \times L_3$	$4\pi h \times 2h \times 4\pi h/3$	
Grid points $N_1 \times N_2 \times N_3$	$128 \times 129 \times 128$	
Resolution	$x_1$ -direction	15
	$x_2$ -direction	0.045 – 3.7
	$x_3$ -direction	4.9
Reynolds number $Re_\tau$	150	
Rotation number $Ro_\tau$	0	5.0
Time steps for ensemble averaging	20000	

Table 2: Comparison of resolutions

Author	Resolution
Present	(15, 0.045 – 3.7, 4.9)
Kristoffersen & Andersson(1993)	(20, 0.5 – 5, 10)
Nishimura & Kasagi(1996)	(18, 0.08 – 4.9, 7.4)

Fig. 5 では  $Q = 0.02$  の等値面を示している。図を見ると圧力側においては壁面近くで馬蹄型の渦や  $x_1$  方向に引き伸ばされた渦など典型的な壁乱流の構造が観察できるが、負圧側においては渦構造が観察できない。回転平板チャネル乱流においては負圧側が層流化傾向にあることが知られており、この結果もそれを示しているといえる。

### 2.4 絶対渦度ゼロ分布のメカニズム

本節では実験的研究あるいは数値計算上で存在が確認されている回転平板チャネル乱流のコア領域に現れる絶対渦度ゼロ分布について考察を行う。

#### 2.4.1 ヘリシティ輸送方程式によるアプローチ

回転平板チャネル乱流における変動ヘリシティ  $\langle h' \rangle \equiv \langle u'_i \omega'_i \rangle$  の輸送方程式に完全発達条件を加えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (\langle u'_1 \omega'_2 \rangle - \langle u'_2 \omega'_1 \rangle) \Omega_A = & + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_i u'_i \omega'_2 \rangle}{\partial x_2} - \frac{\partial \langle u'_i u'_2 \omega'_i \rangle}{\partial x_2} - \frac{\partial \langle p' \omega'_2 \rangle}{\partial x_2} \\ & + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \langle h' \rangle}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{2}{Re_\tau} \left\langle \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

よって乱流コア領域において

$$\langle u'_1 \omega'_2 \rangle - \langle u'_2 \omega'_1 \rangle \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{式(2)右辺} = 0 \quad (3)$$

であれば  $\Omega_A = 0$  が解析的に求まることとなる。しかしここで平均ヘリシティ輸送方程式に注目すると完全に発達した乱流では  $\langle u'_1 \omega'_2 \rangle - \langle u'_2 \omega'_1 \rangle = \text{const.}$  で表される。さらに壁面上で  $u'_1 = u'_2 = 0$  であるので、結局全領域で

$$\langle u'_1 \omega'_2 \rangle - \langle u'_2 \omega'_1 \rangle = 0 \quad (4)$$

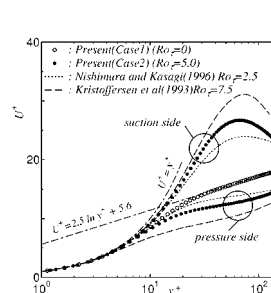


Fig. 3: Mean velocity in wall unit

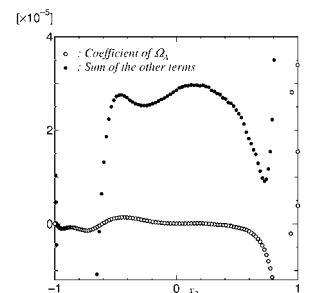


Fig. 4: Comparison of coefficient of  $\Omega_A$  and the others

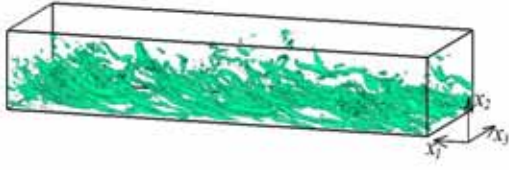


Fig. 5: Isosurface of Q

となり、式(3)の第1条件が満たされないことを示している。以上よりヘリシティ輸送方程式より解析的に絶対渦度ゼロ分布を導き出すことはできない。

#### 2.4.2 エンストロフィ輸送方程式によるアプローチ

回転平板チャンネル乱流における変動エンストロフィ  $e_n \equiv \frac{1}{2} \langle \omega'_i \omega'_i \rangle$  の輸送方程式に完全発達条件を加えると次式が得られる。

$$-\Omega_A \frac{\partial \langle u'_3 \omega'_2 \rangle}{\partial x_2} = -\langle u'_2 \omega'_3 \rangle \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_2 \omega'_i \omega'_i \rangle}{\partial x_2} + \left\langle \omega'_i \omega'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \langle \omega'_1 \omega'_2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 e_n}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{1}{Re_\tau} \left\langle \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (5)$$

と変形できる。すなわち前節と同様に乱流コア領域において

$$\frac{\partial \langle u'_3 \omega'_2 \rangle}{\partial x_2} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{式(5)右辺} = 0 \quad (6)$$

が証明できれば解析的に絶対渦度ゼロ分布が証明できることになる。そこで

$$\left| \frac{\partial \langle u'_3 \omega'_2 \rangle}{\partial x_2} \right| \gg |\text{式(5)右辺}| \quad (7)$$

が式(6)と等価であることを利用し、数値計算により式(7)が成立するかを示す。Fig. 4に、変動エンストロフィ輸送方程式中の  $\Omega_A$  の係数と、その他の項の和の比較を示す。Fig. 2によれば、絶対渦度が0となるのは、 $x_2$  がおよそ  $-0.6 < x_2 < 0$  の範囲であるが、Fig. 4ではその範囲で  $\Omega_A$  の係数の最大値がおよそ  $1.4 \times 10^{-6}$ 、その他の項の和は  $10^{-5}$  のオーダーとなっており、式(7)が成立しているとは言えない。以上よりエンストロフィ輸送方程式からも絶対渦度ゼロ分布の証明は不可能である。

以上のように高次の乱流統計量の輸送方程式からも絶対渦度ゼロ分布が導き出せない。このことから今回行ったような輸送方程式を変形することによる絶対渦度ゼロ分布の証明は不可能であることが予想される。

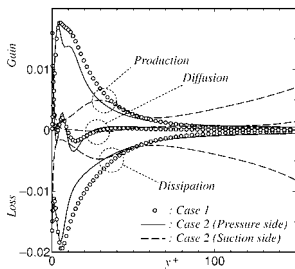


Fig. 6: Budget of dissipation rate

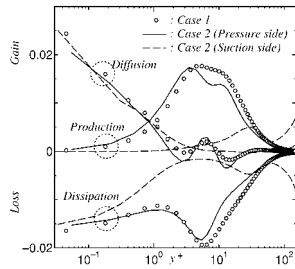


Fig. 7: Dissipation rate in logarithm scale

#### 2.5 乱流エネルギー散逸率の収支

乱流エネルギー散逸率  $\varepsilon \equiv \frac{1}{Re_\tau} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle$  の輸送方程式は次式で表される。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_{MG}^{(\varepsilon)} + P_G^{(\varepsilon)} + P_T^{(\varepsilon)} + D_V^{(\varepsilon)} + D_T^{(\varepsilon)} + D_P^{(\varepsilon)} - \varepsilon^{(\varepsilon)} \quad (8)$$

ここで、上式中の各項は

$$\left. \begin{aligned} P_{MG}^{(\varepsilon)} &= -\frac{2}{Re_\tau} \left\langle \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) + \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) \right\rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ P_G^{(\varepsilon)} &= -\frac{2}{Re_\tau} \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \\ P_T^{(\varepsilon)} &= -\frac{2}{Re_\tau} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \right\} \text{生成項}$$

$$\left. \begin{aligned} D_V^{(\varepsilon)} &= \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j} \\ D_T^{(\varepsilon)} &= -\frac{\partial \langle u'_j \varepsilon' \rangle}{\partial x_j} \\ D_P^{(\varepsilon)} &= -\frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \right\} \text{拡散項}$$

$$\varepsilon^{(\varepsilon)} = \frac{2}{Re_\tau^2} \left\langle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \quad \text{散逸項}$$

である。ただし、

$$\varepsilon' = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (9)$$

とした。このように乱流エネルギー散逸率の輸送方程式には系の回転角速度  $\Omega_F$  は表れず、回転の効果は間接的に現れることになる。

乱流エネルギー散逸率の収支を Fig. 6 に、また壁面近くでの挙動を見るために横軸を対数にしたものを Fig. 7 に示す。図を見ると静止系 (Case 1) と回転系 (Case 2) の圧力側においては大きな定性的変化は見られないが Case 2 の負圧側においては Case 1 に比べ生成および散逸の壁面近傍のピークが小さく、チャンネル中央側へ移動していることがわかる。また乱流エネルギー散逸率の収支はほぼチャンネル全域に渡って生成項と散逸項が釣り合う構造となっているが、壁面のごく近傍では拡散項と散逸項が釣り合っている。Case 1 および Case 2 の圧力側においては生成項よりも拡散項が卓越する範囲は  $y^+ < 0.8$  程度であるが、Case 2 の負圧側においてはこれが  $y^+ < 2$  程度と、よりチャンネル中央側に拡大している。

#### 3 結言

過去に実験的研究あるいは数値計算上確かめられている絶対渦度ゼロ分布に関する以下の検討を行った。

- 変動ヘリシティおよび変動エンストロフィの輸送方程式から絶対渦度ゼロ分布を導くことを試みたが、いずれの方法でも無理であることがわかった。
- このような高次の統計量の輸送方程式からも導けないため乱流統計量の輸送方程式から絶対渦度ゼロ分布を導き出すことは不可能ではないかと予想できた。

回転平板チャンネル乱流の直接数値計算を行い、以下の結果を得た。

- 従来の DNS データとの比較を行い、今回行われた計算の信頼性が確かめられた。
- 過去に計算例の少ない乱流エネルギー散逸率の収支について示し、負圧側でピーク値の減少など回転の影響を大きく受けることを示した。

#### 参考文献

- [1] J. P. Johnston et al., J. Fluid Mech., 56 (1972)
- [2] R. Kristoffersen et al., J. Fluid Mech., 256 (1993)
- [3] M. Nishimura et al., Proceedings of 3rd KSME-JSME (1996)