

円筒座標系のエネルギー保存形差分スキーム

大木武志

2003年2月18日

1 緒言

近年のめまぐるしい計算機の発達により、直接数値計算 (DNS) やラーゼ・エディ・シミュレーション (LES) などを用いた乱流数値解析が可能となりつつある。しかし円管内乱流は工学および工業上大変重要な壁乱流であるものの、DNS や LES による解析はこれまであまり行われていない。これまでの2次精度差分法による円管内乱流のDNSではEggels et al.(1994), Verzicco & Orlandi(1996), 最近ではFukagata & Kasagi(2002)らによる提案がなされているが、これらの研究で用いられている差分スキームは不十分なものであり、さらなる計算手法の開発が期待される。そこで本研究ではスタガード格子において基礎方程式が離散的に運動エネルギーを保存する新たな空間2次精度差分スキームを提案する。また極の取り扱い方法についても検討する。検証計算として二重円管流および円管流の非粘性数値計算を実行し、運動エネルギーの保存特性を議論する。

2 空間離散化手法

2.1 使用する格子系

本研究ではスタガード格子を使用する。Fig.1に $x-r$ 断面から見たスタガード格子, Fig.2に $r-\theta$ 断面から見たスタガード格子を示す。各変数の定義点は図のように配置される。

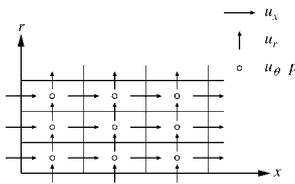


Fig. 1: Staggered mesh system in a $x-r$ plane.

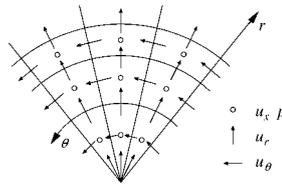


Fig. 2: Staggered mesh system in a $r-\theta$ plane.

Fig.3に $r=0$ の軸付近の検査体積を示す。

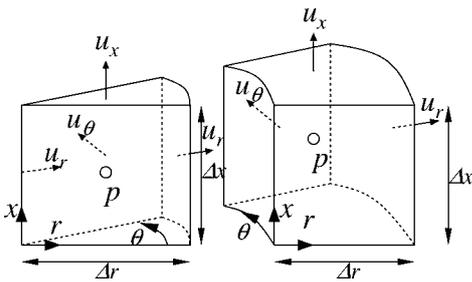


Fig. 3: Sketch of the 3D Control-volume locations in pipe central region

2.2 離散オペレーター

差分スキームの簡潔な表記のために、補間及び差分オペレーターを以下に定義する。ここで、 ζ^x, ζ^r および ζ^θ は円筒座標系の独立変数に対応した計算面上の独立変数、 $\Delta\zeta^x, \Delta\zeta^r$ および $\Delta\zeta^\theta$ は計算面上の格子間隔である。また n は補間および差分のステンスルである。

補間オペレーター

$$\overline{\Phi}^{n\zeta^x}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta) = \frac{\Phi(\zeta^x + n \cdot \Delta\zeta^x/2, \zeta^r, \zeta^\theta) + \Phi(\zeta^x - n \cdot \Delta\zeta^x/2, \zeta^r, \zeta^\theta)}{2}$$

$\overline{\Phi}^{n\zeta^r}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta), \overline{\Phi}^{n\zeta^\theta}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta)$ も同様に定義される。

差分オペレーター

$$\frac{\delta_n \Phi}{\delta_n \zeta^x}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta) = \frac{\Phi(\zeta^x + n \cdot \Delta\zeta^x/2, \zeta^r, \zeta^\theta) - \Phi(\zeta^x - n \cdot \Delta\zeta^x/2, \zeta^r, \zeta^\theta)}{n \cdot \Delta\zeta^x}$$

$\frac{\delta_n \Phi}{\delta_n \zeta^r}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta), \frac{\delta_n \Phi}{\delta_n \zeta^\theta}(\zeta^x, \zeta^r, \zeta^\theta)$ も同様に定義される。

2.3 提案する空間2次精度差分スキーム

連続の式

$$(\text{Cont.} - \text{S2}) = 0 \quad (2.1)$$

NS 式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\text{Conv.} - \text{S2})_i + (\text{Pres.} - \text{S2})_i - (\text{Visc.} - \text{S2})_i = 0 \quad (2.2)$$

式中の $-\text{S2}$ はスタガード格子の2次精度差分であることを示している。また $i = x, r, \theta$ である。ここで連続の式、圧力項の差分スキームは以下で定義する。

$$(\text{Cont.} - \text{S2}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} u_j \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$(\text{Pres.} - \text{S2})_i = \frac{1}{h_i} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \zeta^i} \quad i = x, r, \theta \quad (2.4)$$

粘性項に関しては各方向それぞれ以下のような差分スキームを採用する。

$$(\text{Visc.} - \text{S2})_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} \tau_{jx} \right] \quad (2.5)$$

$$(\text{Visc.} - \text{S2})_r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} \tau_{jr} \right] - \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\sqrt{g}}{r} \tau_{\theta\theta} \right)^{1\zeta^r} \quad (2.6)$$

$$(\text{Visc.} - \text{S2})_\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\frac{\sqrt{g}}{h_j} \tau_{j\theta} \right] + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\sqrt{g}}{r} \tau_{\theta r} \right)^{1\zeta^\theta} \quad (2.7)$$

また、 $(\text{Conv.} - \text{S2})_i$ は対流項差分スキームの総称で発散型、勾配型、混合型が選択可能であり、発散型では

$$(\text{Div.} - \text{S2})_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} u_j \right)^{1\zeta^x} \frac{1}{u_x^{1\zeta^j}} \right] \quad (2.8)$$

$$(\text{Div.} - \text{S2})_r = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} u_j \right)^{1\zeta^r} \frac{1}{u_r^{1\zeta^j}} \right] - \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\sqrt{g}}{r} u_\theta^{1\zeta^\theta} u_r^{1\zeta^r} \right)^{1\zeta^r} \quad (2.9)$$

$$(\text{Div.} - \text{S2})_\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta_1}{\delta_1 \zeta^j} \left[\left(\frac{\sqrt{g}}{h_j} u_j \right)^{1\zeta^\theta} \frac{1}{u_\theta^{1\zeta^j}} \right] + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\sqrt{g}}{r} u_\theta^{1\zeta^\theta} u_r^{1\zeta^r} \right)^{1\zeta^\theta} \quad (2.10)$$

と離散化する。ここでは発散型を示したが連続の式が満足 $[(\text{Cont.} - \text{S2}) = 0]$ される場合、発散型、勾配型および混合型は全て等価となる。

3 時間離散化手法

本研究の検証計算においては、陽的な時間進行法に3次精度のRunge-Kutta法 (RK3), 陰的な時間進行に2次精度のCrank-Nicolson法 (CN) を用いる。この手法をRunge-Kutta/Crank-Nicolson混合法 (RK3/CN) と呼ぶ。また、粘性項についてはAkselvoll & Moin(1995)と同様に領域分割して時間進行させ、対流項については全方向陽的に時間進行させる。

4 検証計算

本研究で提案する差分スキーム自身のエネルギー保存特性を調べるためにまず二重円管内流(極なし)における非粘性数値計算を実行する. また極の取り扱い方法を検討するために円管内流(極あり)に対する非粘性数値計算を実行する. そして運動エネルギーの保存特性を議論する.

4.1 差分スキーム自体の検証

計算対象を Fig.4 に示す. なお, 内外径比は $R_2/R_1 = 0.1$ とする. 計算領域は $4\pi D \times D \times 2\pi D$, 格子数は $16 \times 16 \times 32$ で半径方向に不等間隔, 時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ であり, 積分時間は $T = 10$ である.

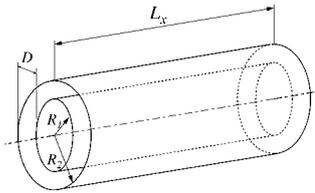


Fig. 4: Computational domain.

Diff.-term については

- 本研究で提案するタイプ (Present)
- Eggels et al.(1994) タイプ (Standard)
- Verzicco & Orlandi(1996) タイプ (V & O)
- Fukagata & Kasagi(2002) タイプ (F & K)

Nondiff.-term については

- Present
- Standard
- F & K

の差分スキームを検討する.

計算結果を Fig.5 に示す. Fig.5 中の case1~6 は Table 1 の通りである. Fig.5 より運動エネルギーを保存しているのは Diff.-term, Nondiff.-term ともに本研究で提案する差分スキームを用いた場合および Diff.-term に本研究で提案する差分スキーム, Nondiff.-term に Fukagata & Kasagi(2002) による差分スキームを用いた場合であることが分かる.

Table 1: Definition of case1~6

	Diff.-term	Nondiff.-term
case1	Present	Present
case2	Standard	Present
case3	V & O	Present
case4	F & K	Present
case5	Present	Standard
case6	Present	F & K

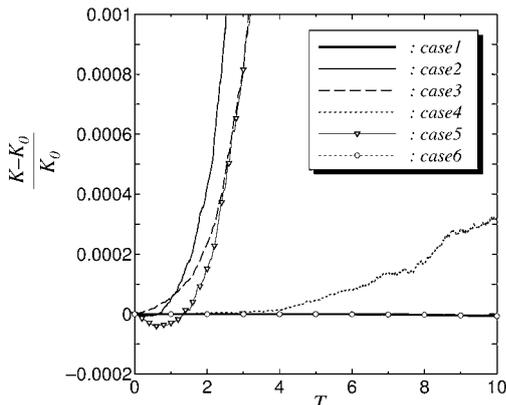


Fig. 5: Time trace of the error of total kinetic energy.

4.2 極の取り扱い方法の検証

計算対象を Fig.6 に示す. 計算領域は $4\pi R \times R \times 2\pi R$, 格子数は $16 \times 16 \times 32$ で半径方向に不等間隔, 時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ であり, 積分時間は $T = 10$ である. なお, スキーム自体の誤差の議論を省くために前節での結果より, エネルギー保存が保たれる Present を Diff.-term および Nondiff.-term ともに適用することにする.

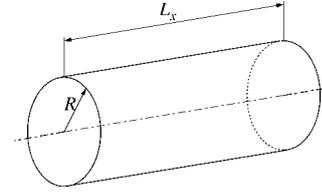


Fig. 6: Computational domain.

本研究では円管中心 $r = 0$ での半径方向速度 u_r の決め方において以下に示す方法を検討する.

- Eggels et al.(1994) の方法 (*Multi-2nd*)
- Griffin et al.(1979) の方法 (*Single¹-2nd*)
- Fukagata & Kasagi(2002) の方法 (*Single²-2nd*)
- 上記 3 つの方法の 4 次精度版 (*Multi-4th, Single¹-4th, Single²-4th*)

計算結果を Fig.7 に示す. Fig.7 より Eggels et al.(1994) による方法より Griffin et al.(1979) および Fukagata & Kasagi(2002) による方法を用いた方が格段に良いエネルギー保存特性を持つことが分かる.

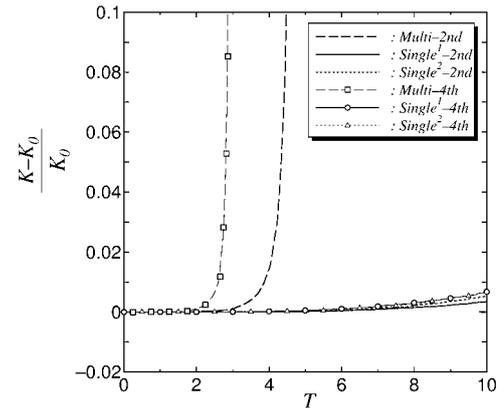


Fig. 7: Time trace of the error of total kinetic energy.

5 結言

本研究では円筒座標系における空間 2 次精度差分スキームを提案し, 差分スキーム自体のエネルギー保存特性を検討するために二重円管内流の非粘性数値計算を行った. また極の取り扱い方法を検討するために円管内流の非粘性数値計算を行った. 結論を以下に示す.

- 本研究で提案する差分スキームは時間離散化誤差を除外すれば Diff.-term および Nondiff.-term ともに運動エネルギーを完全に保存する.
- 極の取り扱い方法に関しては Griffin et al.(1979) および Fukagata & Kasagi(2002) によるものが, 高次精度化にも対応した適切な方法である.

参考文献

1. 森西洋平, 機論 (B 編), 62 - 604(1996 - 12), 4090-4112
2. Eggels, PhD thesis, Delft University of Technology(1994)
3. R.Verzicco and Orlandi, JCP, 123(1996), 402-414
4. K.Fukagata and N.Kasagi, JCP, 181(2002), 478-498
5. MD.Griffin,E.Jones,and JD.Anderson,Jr, JCP, 30(1979), 352-360.