

壁乱流における SGS エネルギーの評価

磯村 考輔

2003 年 2 月 18 日

1 はじめに

SGS モデルの SGS 応力の垂直応力 (SGS エネルギー) は、圧力と同等に作用する。よって、従来のモデルではこの垂直応力を除いたトレースフリー部分のみでモデル化することが多い。しかし、その SGS エネルギーの算出には一様乱流の統計量から与えられ、壁乱流に適用すると正確な SGS エネルギーを与えない。そこで、本研究では壁乱流で正確な SGS エネルギーを算出するためのモデルを考える。

2 基礎的事項

2.1 フィルター化と基礎方程式

LES 特有の手法であるフィルター化の定義は $\bar{\phi} = G * \phi$, $\phi' = (1 - G) * \phi$ である。ここで G はフィルター関数,* はたたみ込みを表す。

N-S 式をフィルター化すると次の基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{sgs}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

ここで SGS 応力 τ_{ij}^{sgs} は次式で定義される。

$$\tau_{ij}^{sgs} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.3)$$

2.2 計算手法と流れ場

DNS はスペクトル法^[1]によって計算される。流れ場形状を図 2.1 に示す。ここで、 $(N_1 \times N_2 \times N_3)$ を格子数、 $(L_1 \times L_2 \times L_3)$ を計算領域、 $(\bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_3)$ をグリッドフィルターの幅とし、このフィルター幅を変化させた場合をそれぞれ case1 ~ 4 とする。計算条件の詳細を表 2.1 に示す。

2.3 対象とする SGS モデル

本研究では次の 5 つのモデルの SGS エネルギーの評価を行う。

2.3.1 Smagorinsky モデル

流れ場に局所平衡を仮定して得られる渦粘性型モデルの一種である。SGS エネルギーは TSDIA 理論より得られた式^[2]を用いる。SGS 応力と SGS エネルギーは以下のように定義される。

$$\tau_{ij}^{SGS} = \frac{2}{3} k_{SGS} \delta_{ij} - 2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij} \quad (2.4)$$

$$k_{SGS} = \frac{\nu_{SGS}^2}{C_\nu \bar{\Delta}} \quad (2.5)$$

本研究では以下のように定義される 2 種類の壁面減衰関数を導入する。

$$f_w = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right), (\text{Van Driest type}) \quad (2.6)$$

$$f_w = 1 - \exp\left[-\frac{y^+}{A} \left(\frac{y^+}{3}\right)^{1/2}\right], (\text{Piomelli type}) \quad (2.7)$$

モデル定数は $C_S = 0.1$, $C_\nu = 0.05$ を用いる。

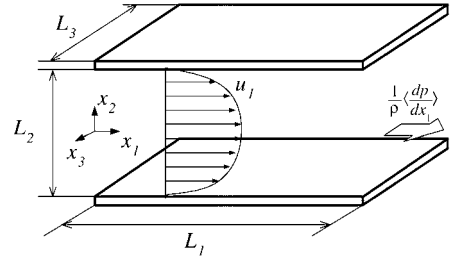


Fig. 2.1 Poiseuille flow with passive scalar

Table 2.1 Computational parameters for a priori

test name	case1	case2	case3	case 4
test type	a priori test			
Re_τ	150			
Grid	$128 \times 129 \times 128$			
Region	$4\pi h \times 2h \times 4\pi h/3$			
Grid resolution	$14.6 \times (0.0449 \sim 3.66) \times 4.88$			
Grid filter width	117×39	77.7×26.0	58.4×19.5	46.7×15.6
Grid filter type	Gaussian			

2.3.2 ダイナミック Smagorinsky モデル

Smagorinsky モデルの SGS 渦粘性係数を Germano identity^[3]を仮定してダイナミック化し動的に決定する。SGS エネルギーは以下のように定義される。

$$k_{SGS} = -\frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{ii} M_{jj} \rangle}{\langle M_{ii} M_{jj} \rangle} |\bar{S}|^2 \frac{1}{C_\nu^2 \bar{\Delta}^2} \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j}}, \quad M_{ij} = \frac{3}{\bar{\Delta}} \left(|\bar{S}|^2 - |\bar{S}|^2 \right) \quad (2.9)$$

2.3.3 Bardina モデル

スケール相似則の仮定の下で導出される Bardina モデル^[4]を以下のように定義する。

$$k_{SGS} = \frac{1}{2} C_L L_{kk}^m \quad (2.10)$$

ここでは、 $C_L = 1.0$ を用いている。

2.3.4 ダイナミック Bardina モデル

係数 C_L をダイナミック化し、次のように SGS エネルギーを定義する。

$$k_{SGS} = \frac{1}{2} C_L L_{kk}^m, \quad C_L = \frac{\mathcal{L}_{ij} H_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (2.11)$$

$$H_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j}} - (\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j}}) \quad (2.12)$$

2.3.5 スカラレベル ダイナミック Bardina モデル

ダイナミック Bardina モデルの $\mathcal{L}_{ij}$, H_{ij} の対角項のみを用いダイナミック化を行う。SGS エネルギーは次のように定義される。

$$k_{SGS} = \frac{1}{2} C_L L_{kk}^m, \quad C_L = \frac{\mathcal{L}_{ii} H_{jj}}{H_{ii} H_{jj}} \quad (2.13)$$

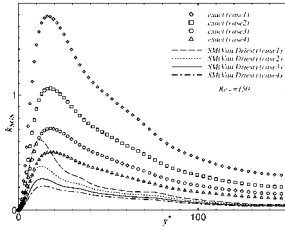


Fig. 2.2 k_{SGS} applied SM (Van Driest)

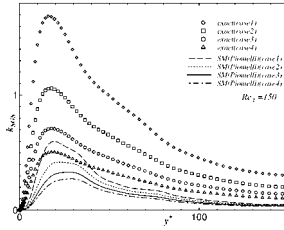


Fig. 2.3 k_{SGS} applied SM (Piomelli)

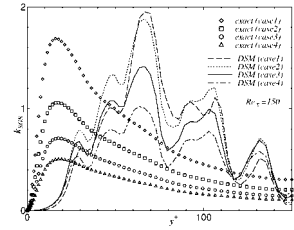


Fig. 2.4 k_{SGS} applied DSM

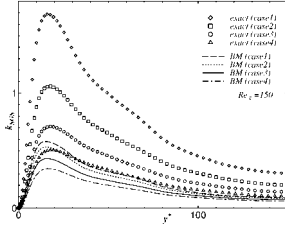


Fig. 2.5 k_{SGS} applied BM

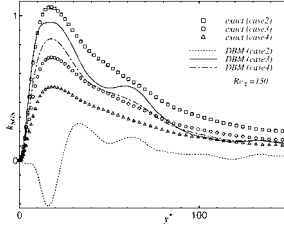


Fig. 2.6 k_{SGS} applied DBM

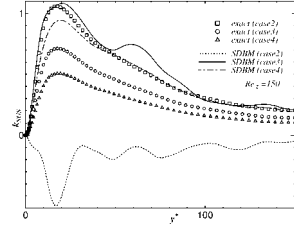


Fig. 2.7 k_{SGS} applied SDBM

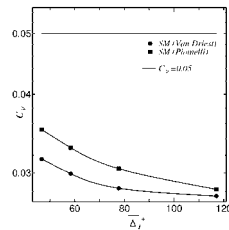


Fig. 2.8 optimized C_ν

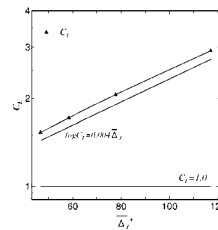


Fig. 2.9 optimized C_L

3 結果と考察

3.1 SGS エネルギーの評価

Fig.2.2, Fig.2.3 より, Smagorinsky モデルは SGS エネルギーを厳密な値より過小に見積もる. また, 壁面漸近挙動が Van Driest 型の方がより厳密な値に近い, Smagorinsky モデルでは Van Driest 型を用いたほうがよい結果が得られる.

Fig.2.4 よりダイナミック Smagorinsky モデルは SGS エネルギーを過大に見積もる. また, 壁面近傍での値が厳密な値と異なる. これは, SGS 渦粘性係数の見積もりが壁面近傍で過小に評価され, その二乗量が SGS エネルギーの挙動に反映するためである.

Fig.2.5 より Baridina モデルは, 厳密な値より定量的には過小に見積もるが, 定性的には厳密な値と一致と言える.

Fig.2.6 より, ダイナミック Bardina モデルは小さいフィルター幅では定量的な改善が見られるが, 大きなフィルター幅では負値を取り, SGS エネルギーの評価に適さなくなる.

Fig.2.7 より, スカラレベルダイナミック Bardina モデルは, ダイナミック Bardina モデルより, さらに過大に SGS エネルギーを評価する. これより, スカラレベルでダイナミック化を行っても SGS エネルギーの再現性は向上しない.

3.2 モデル定数の最適化

Fig.2.8 より, Smagorinsky モデルでは一様乱流から求められている $C_\nu = 0.05$ よりも小さな値で見積もられることが分かる. また, これを適用した SGS エネルギーはフィルター幅が比較的小さければ厳密な値とよく一致し, フィルター幅が大きくなると, 定性的に一致しなくなる.

Fig.2.9 より, Bardina モデルでは, 現在用いられている $C_L = 1.0$ よりも大きな値で見積もられていることが

分かる. また, これを適用した SGS エネルギーはどのフィルター幅においても, 厳密な値をよく反映した結果となる.

これらをフィルター幅の関数で表すと, 以下のよう求められる.

$$C_\nu = 0.0361e^{-2.00\Delta_+^+}, (\text{Van Driest type}) \quad (3.1)$$

$$C_\nu = 0.0445e^{-3.30\Delta_+^+}, (\text{Piomelli type}) \quad (3.2)$$

$$C_L = 0.705e^{9.97\Delta_+^+} \quad (3.3)$$

4 結言

- Smagorinsky モデルでは Van Driest 型の優位性を示した
- ダイナミック Smagorinsky モデルでは SGS エネルギーを正確に再現できないことを示した
- Bardina モデルでは厳密な値を良く反映した結果が得られることを示した
- Bardina モデルのダイナミック化は小さいフィルター幅では定量的な改善が見られることを示した
- 最適なモデル定数はフィルター幅の関数で求められることを示した

参考文献

- [1] 森西ら, 機論 (B 論), 論文 No.02-1176(投稿中)
- [2] Yoshizawa and Horiuti, J.Phys.Soc.Jpn., 54, (1985)
- [3] Germano et al., Phys.Fluids, A4(3), (1992)
- [4] Bardina et al., Stanford University Tech. Rep.TF-19, (1983)